Herhalingstentamen W5, 26 juni 2002, 14.00 WSN 20

1. U is een deelverzameling van het complexe vlak $\mathbf{C}$.
(a) Veronderstel dat U open is en laat x_0 een punt van U zijn. Wanneer zijn twee gesloten wegen γ, δ in U met begin- en eindpunt x_0 homotoop in U?
(b) Geef de definitie van een enkelvoudig samenhangende open deelverzameling U van $\mathbf{C}$. (de Engelse term is "simply connected")
(c) Geef een voorbeeld van een open samenhangende U die niet enkelvoudig samenhangend is.

2. Zij $f := \frac{z}{e^z - 1}$.
(a) Geef de maximale $R > 0$ aan zodat f holomorf is op $\{z \in \mathbf{C} | \ |z| < R\}$.
(b) f een machtreeksontwikkeling $f = \sum_{n \geq 1} f_n z^n$. Wat is zijn convergentiestraal?
(c) Bereken f_i voor $i = 0, 1, 2, 3$. Bewijs dat alle f_i rationale getallen zijn.

3. F is de meromorfe functie $\frac{e^z - 1}{z^2 (z-1)^2}$.
(a) Bereken voor elk punt $a \in \mathbf{C}$ de orde van F in a.
(b) Heeft F een pool voor het punt $z = \infty$? Zo ja, wat is zijn orde?
(c) Bereken de eerste drie termen van de Laurent ontwikkeling van F in het punt $z = 1$.

4. Laat U de open deelverzameling van $\mathbf{C}$ die verkregen wordt door het weglaten van de negatieve reeële as. Geef de formule voor de standaard complexe logaritme $\text{Log } z$ op U. Bereken $\text{Log}(i)$ en $(-i)^{-i}$.

5. Bewijs dat het oneindige product $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{z}{n})$ voor iedere $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$ divergeert. Hoe moet dit product worden veranderd om een holomorfe funktie f op $\mathbf{C}$ te verkrijgen die in elke $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$ een nulpunt heeft van orde 1?

6. $F(z) = \frac{z+5}{z-5}$. Beschrijf het beeld van de rechte $\{z \in \mathbf{C} | \ Re(z) = c\}$ voor ieder reëel getal c.

7. Bereken dat de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^6} dx$ gelijk is aan $\frac{\pi}{6}$. Welke stelling gebruikt U en zijn de voorwaarden vervuld?